



Universität Stuttgart
Institut für Systemtheorie und Regelungstechnik
Prof. Dr.-Ing. Frank Allgöwer

Musterklausur Konzepte der Regelungstechnik, 29. Februar 2012

Die Klausur umfasst **15 Seiten** (10 Aufgaben, 56 Punkte).

Name, Vorname: _____

Antworten ohne Begründung werden nicht akzeptiert. Es sei außerdem darauf hingewiesen, dass eine Musterklausur keineswegs dafür gedacht ist, alle Themenbereiche der Vorlesung abzudecken.

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Gegeben sei das System

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}} &= \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}.\end{aligned}$$

Die Eigenwerte der Dynamikmatrix sind $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = -3$.

Ist das System steuerbar? Wenn nein, ist es stabilisierbar?

Ist das System beobachtbar? Wenn nein, ist es entdeckbar?

(3 Punkte)

Lösung:

Steuerbarkeitsmatrix $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ hat vollen Rang $\Rightarrow$ steuerbar.

Beobachtbarkeitsmatrix $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$ hat keinen vollen Rang $\Rightarrow$ nicht beobachtbar.

Matrix $\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ hat das charakteristische Polynom $\lambda^2 + 4\lambda + 3$ und ist daher Hurwitz
 $\Rightarrow$ Das System ist entdeckbar, da es keine instabilen Moden hat.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Gegeben sei das System

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x(t).\end{aligned}$$

- a) Bestimmen Sie eine Zustandsrückführung $u(x)$ und einen Anfangswert $x_0 = x(t=0) \neq 0$ so, dass der Ausgang identisch verschwindet, d.h. $y(t) = 0$ für alle $t \geq 0$. (1 Punkt)
- b) Bestimmen Sie die Nulldynamik des offenen Kreises und analysieren Sie deren Stabilität. (1 Punkt)
- c) Bestimmen Sie das Stabilitätsverhalten der Nulldynamik des geschlossenen Regelkreises mit der aus Teilaufgabe a) bestimmten Zustandsrückführung. (1 Punkt)

Lösung:

- a) Der Ausgang y und die höheren Ableitungen $\dot{y}, \ddot{y}, \dots$ müssen identisch verschwinden, d.h.

$$y(t) \equiv 0 \Rightarrow x_1(t) - x_2(t) \equiv 0$$

$$\dot{y}(t) \equiv 0 \Rightarrow -x_1(t) - x_2(t) - u(t) \equiv 0.$$

Aus $x_1(t) \equiv x_2(t)$ und $u(t) \equiv -(x_1(t) + x_2(t))$ folgt, dass die Zustandsrückführung $u = -(x_1 + x_2)$ und die Anfangsbedingung $x_0 = k \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^T$ mit $k \in \mathbb{R}$ das Problem lösen.

- b) Aus der vorherigen Teilaufgabe wissen wir dass für $y(t) \equiv 0$ die Bedingung $x_1(t) \equiv x_2(t)$ gelten muss. Aus $\dot{x}_1 = -x_1 - 2x_2$ ergibt sich also die Nulldynamik $\dot{x}_1 = -3x_1$, d.h. die Nulldynamik wird durch eine lineare eindimensional Dgl beschrieben. Weil diese einen Eigenwert bei -3 hat, ist die Nulldynamik ist asymptotisch stabil.
- c) Gem. Vorlesung ist die Nulldynamik invariant unter Zustandsrückführung. Damit ist die Nulldynamik des geschlossenen Regelkreises gegeben durch $\dot{x}_1 = -3x_1$ und asymptotisch stabil.

Aufgabe 3 (9 Punkte)

Gegeben sei das System

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 - \alpha x_1 - (x_1 + x_2)^2 x_2,\end{aligned}$$

wobei $x = (x_1 \ x_2)^T \in \mathbb{R}^2$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ ein konstanter Parameter ist.

- a) Für welche positiven Konstanten α ist die Ruhelage $x = 0$ asymptotisch stabil. Verwenden Sie zur Beantwortung dieser Frage, die Linearisierungsmethode von Ljapunow. (2 Punkte)

- b) Zeigen Sie mit Hilfe der Ljapunow Funktion

$$V(x) = \alpha x_1^2 + x_2^2$$

und mit Hilfe des LaSalle' schen Invarianzprinzips, dass die Ruhelage 0 global asymptotisch stabil ist für $\alpha > 0$. (4 Punkte)

- c) Ist die Ruhelage 0 für $\alpha = 0$ global asymptotisch stabil? Geben Sie eine Begründung an. (3 Punkte)

Lösung:

- a) Linearisierung um die Ruhelage $x = 0$ ergibt

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha & -1 \end{pmatrix} x(t).$$

Das System ist in Regelungsnormalform, hat also das charakteristische Polynom $\chi(\lambda) = \lambda^2 + \alpha\lambda + 1$. Nach der Vorzeichenbedingung (Hurwitz) ist das linearisierte System für $\alpha > 0$ asymptotisch stabil.

- b) Mit der Ljapunowfunktion $V(x) = \alpha x_1^2 + x_2^2$ erhält man:

$$\begin{aligned}V(x) &= \alpha x_1^2 + x_2^2 > 0 \\ \dot{V}(x) &= -2x_2^2 - 2x_2^2(x_1 + x_2)^2 \leq 0.\end{aligned}$$

Wir untersuchen die Menge $\dot{V}(x) = 0$ mit Hilfe des LaSalle' schen Invarianzprinzips. D.h.

$$\begin{aligned}\dot{x}_2 &= -x_2 - \alpha x_1 - (x_1 + x_2)^2 x_2 \\ x_2 \equiv 0 &\Rightarrow \dot{x}_2 \equiv 0 \Rightarrow \alpha x_1 \equiv 0 \Rightarrow x_1 \equiv 0,\end{aligned}$$

damit enthält die Menge $\dot{V}(x) = 0$ nur die Lösung $x(t) \equiv 0$ und somit ist die Ruhelage 0 global asymptotisch stabil für $\alpha > 0$ ist.

- c) Ein Ruhelage kann nur dann global asymptotisch stabil sein, wenn das System genau **eine** Ruhelage hat. Für $\alpha = 0$ ergeben sich weitere Ruhelagen der Form

$$x_2 = 0, \ x_1 \in \mathbb{R}.$$

Damit ist die Ruhelage 0 für $\alpha = 0$ nicht asymptotisch stabil.

Aufgabe 4 (6 Punkte) Gegeben sei ein System der Form

$$\dot{x} = f(x)$$

mit $x \in \mathbb{R}^n$, $f(0) = 0$. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass globale asymptotische Stabilität der Ruhelage 0 gewöhnlich mit Hilfe der Direkten Methode von Ljapunow nachgewiesen wird. Ein unbekannter Systemtheoretiker behauptet nun ganz frech, eine neue wunderbare Alternative zur Ljapunowschen Stabilitätstheorie gefunden zu haben. Er schlägt folgenden Stabilitätssatz in seinen wissenschaftlichen Arbeiten vor:

Satz 1 *Das System $\dot{x} = f(x)$ mit $x \in \mathbb{R}^n$, $f(0) = 0$ ist global asymptotisch stabil, falls eine radial unbeschränkte, differenzierbare Funktion W existiert, die folgende Eigenschaft erfüllt:*

$$\begin{aligned} W(x) &< 0 \\ L_f W^2(x) &< 0 \end{aligned}$$

für alle von Null verschiedenen $x \in \mathbb{R}^n$, das heißt $W(x)$ und $L_f W^2(x)$ sind negativ definite Funktionen.

Sie glauben aber nicht so recht an diese sogenannte „neue wunderbare Alternative“. Viel eher ist zu vermuten, dass entweder (i) Satz 1 mit Hilfe der Ljapunowschen Stabilitätstheorie einfach hergeleitet werden kann, oder (ii) Satz 1 falsch ist.

Welche der oben genannten Behauptungen trifft zu? Beweisen Sie Ihre Antwort. (6 Punkte)

Lösung:

Es gilt $W(x) < 0$ für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Damit folgt mit

$$L_f W^2(x) = \frac{\partial(W^2)}{\partial x} f(x) = 2W(x) \frac{\partial W}{\partial x} f(x) = 2 \underbrace{W(x)}_{<0} \underbrace{\dot{W}(x)}_{>0} < 0$$

die Bedingung

$$\begin{aligned} -W(x) &> 0 \\ -\dot{W}(x) &< 0 \end{aligned}$$

für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. D.h., $V(x) = -W(x)$ ist eine Ljapunowfunktion. Somit kann Satz 1 mit Hilfe der Ljapunowschen Stabilitätstheorie hergeleitet werden, d.h. Behauptung (i) ist richtig.

Aufgabe 5 (13 Punkte)

Gegeben sei das nichtlineare System

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1^2 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3^2 + u \\ \dot{x}_3 &= x_2 - x_3^3 \\ y &= x_1.\end{aligned}$$

- a) Bestimmen Sie den relativen Grad des nichtlinearen Systems. (1 Punkt)
- b) Ist das nichtlineare System minimalphasig? (2 Punkte)
- c) Betrachten Sie die Koordinatentransformation

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \phi_1(x_1, x_2, x_3) \\ \xi_2 &= \phi_2(x_1, x_2, x_3) \\ \eta &= x_3.\end{aligned}$$

Bestimmen Sie ϕ_1 und ϕ_2 so, dass das transformierte System in Byrnes-Isidori-Normalform vorliegt. (2 Punkte)

- d) Ist die in Teilaufgabe c) berechnete Koordinatentransformation ein globaler Diffeomorphismus? Geben Sie eine Begründung an. (1 Punkt)
- e) Geben Sie die Byrnes-Isidori-Normalform für das nichtlineare System an. (2 Punkte)
- f) Entwerfen Sie eine Zustandsrückführung $u(x) = k(x)$ mit $x = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$ für das nichtlineare System so, dass das nichtlineare System das Ein- /Ausgangsverhalten

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$$

besitzt. Geben Sie die Zustandsrückführung in x -Koordinaten an. (2 Punkte)

- g) Entwerfen Sie einen Regler $u(x, t) = k(x, t)$ mit $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ für das nichtlineare System so, dass der Ausgang y einem sinusförmigen Referenzsignal y_{ref} für hinreichend große Zeiten folgt, d.h. $y(t) \rightarrow y_{ref} = \sin(t)$ für $t \rightarrow \infty$. Geben Sie den Regler in x -Koordinaten an. (3 Punkte)

Lösung:

Nichtlineares System:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1^2 + x_2 \\ x_3^2 \\ x_2 - x_3^3 \end{pmatrix}}_{f(x)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{g(x)} u$$
$$y = h(x) = x_1.$$

a) $L_g h(x) = 0$, $L_g L_f h(x) = 1 \rightarrow r = 2$.

b) Nulldynamik berechnet man mit $y \equiv \dot{y} \equiv \ddot{y} \equiv 0$:

$$\begin{aligned} y(t) \equiv 0 &\Rightarrow x_1(t) \equiv 0 \\ \dot{y} \equiv 0 &\Rightarrow x_1^2(t) + x_2(t) \equiv 0 \Rightarrow x_2(t) \equiv 0 \\ \ddot{y} \equiv 0 &\Rightarrow 2x_1(t)(x_1^2(t) + x_2(t)) + x_3^2(t) + u(t) \equiv 0 \Rightarrow u = -x_3^2. \end{aligned}$$

Die Nulldynamik ist

$$\dot{x}_3 = -x_3^3$$

also linear mit Eigenwert bei -3 und somit asymptotisch stabil und minimalphasig.

c) (*Kurzlösung*) Koordinatentransformation:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= y = x_1 \\ \xi_2 &= \dot{y} = x_1^2 + x_2 \\ \eta &= x_3. \end{aligned}$$

d) (*Kurzlösung*) Inverse Koordinatentransformation:

$$\begin{aligned} x_1 &= \xi_1 \\ x_2 &= \xi_2 - \xi_1^2 \\ x_3 &= \eta. \end{aligned}$$

Die Koordinatentransformation ist bijektiv und stetig differenzierbar, ebenso wie die inverse Koordinatentransformation, d.h. die Transformation ist ein globaler Diffeomorphismus.

e) (*Kurzlösung*) Die Byrnes-Isidori-Normalform:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= 2\xi_1\xi_2 + \eta^2 + u \\ \dot{\eta} &= \xi_2 - \xi_1^2 - \eta^3. \end{aligned}$$

f) Für lineares E/A-Verhalten ($G(s) = \frac{y}{v} = \frac{1}{s^2}$) wählt man $u = -(2\xi_1\xi_2 + \eta^2) + v$ und zur Stabilisierung linearen Systems wählt man $v = -\xi_1 - 2\xi_2 + w$. Dies ergibt ein lineares E/A-Verhalten ($G(s) = \frac{y}{w} = \frac{1}{(s+1)^2}$). In x -Koordinaten ist die Zustandsrückführung: $u(x) = -(2x_1(x_1^2 + x_2) + x_3^2) - x_1 - 2(x_1^2 + x_2)$.

g) Neue Koordinaten für die E/A-Dynamik („Fehlerkoordinaten“):

$$\begin{aligned} e_1 &= \xi_1 - y_{ref} \\ e_2 &= \xi_2 - \dot{y}_{ref}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die Fehlerdifferentialgleichung:

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2 \\ \dot{e}_2 &= \dot{\xi}_2 - \ddot{y}_{ref} \text{ (mit gleichem } u \text{ wie in Teilaufgabe f) ergibt sich} \\ &= v - \ddot{y}_{ref}. \end{aligned}$$

Wählt man $v = -k_1 e_1 - k_2 e_2 + \ddot{y}_{ref}$, $k_i > 0$, $y_{ref}(t) = \sin(t)$, so folgt $e_i(t) \rightarrow 0$, bzw. $\xi_1(t) = y(t) \rightarrow y_{ref}(t)$, für $t \rightarrow \infty$. Der Regler ist mit $k_1 = 1, k_2 = 2$ also gegeben durch

$$u(x, t) = -(2x_1(x_1^2 + x_2) + x_3^2) - (x_1 - \sin(t)) - 2(x_1^2 + x_2 - \cos(t)) - \sin(t).$$

Aufgabe 6 (2 Punkte)

Kann für das System

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} u(t)$$

ein stabilisierender LQ-Regler entworfen werden, der das Gütekriterium

$$J(\mathbf{x}_0, u(\cdot)) = \int_0^\infty (\mathbf{x}^T(t) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + u^2(t)) dt$$

minimiert? Geben Sie eine kurze Begründung an?

(2 Punkte)

Lösung:

Bedingungen für ein LQR-Regler Entwurf: $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ muss stabilisierbar sein, $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T \geq 0$, d.h. $\mathbf{Q}$ muss positiv semidefinite und symmetrisch sein, $\mathbf{R} = \mathbf{R}^T > 0$, d.h. $\mathbf{R}$ muss positiv definite und symmetrisch sein und $(\mathbf{A}, \mathbf{M})$ mit $\mathbf{Q} = \mathbf{M}^T \mathbf{M}$ muss entdeckbar sein. Für das System

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} u(t)$$

kann kein LQR-Regler entworfen werden, weil das System nicht stabilisierbar ist. Die Dynamik des nicht steuerbaren Zustands x_2 ist instabil.

Aufgabe 7 (2 Punkte)

Das skalare System

$$\dot{x}(t) = -2x(t) + u(t)$$

soll durch einen LQ-Regler bezüglich des Gütekriteriums

$$J(x_0, u(\cdot)) = \int_0^2 (4x^2(t) + 4u^2(t)) dt$$

optimal geregelt werden. Die vier unten gezeigten Abbildungen zeigen mögliche Lösungen $P_i(t)$, $i = 1, \dots, 4$ der Riccati-Differentialgleichung des oben gegebenen LQR-Problems. Geben Sie für jedes $P_i(t)$, $i = 1, \dots, 4$ an, ob dies eine mögliche Lösung des oben gegebenen LQR-Problems ist oder nicht. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort. (2 Punkte)

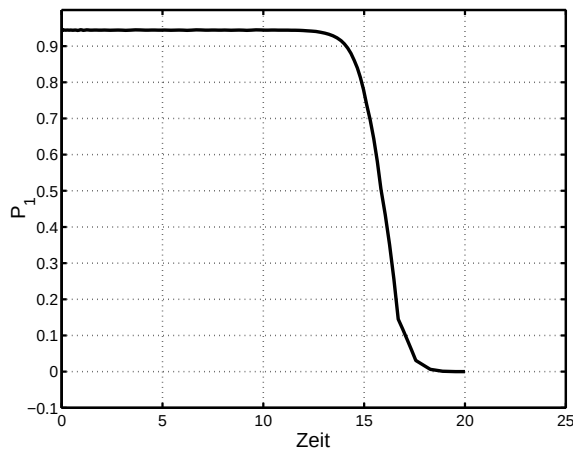


Abbildung 1: Mögliche Lösung P_1 .

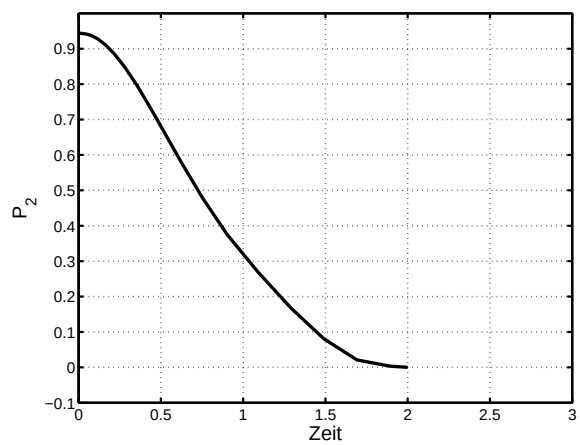


Abbildung 2: Mögliche Lösung P_2 .

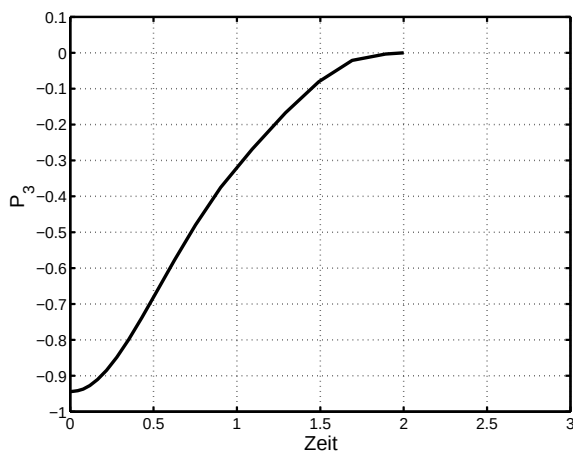


Abbildung 3: Mögliche Lösung P_3 .

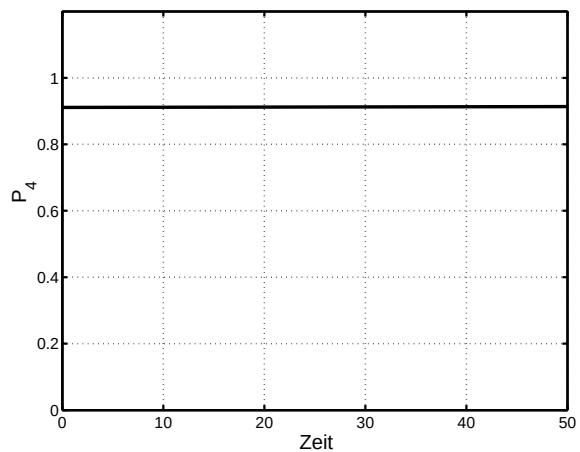


Abbildung 4: Mögliche Lösung P_4 .

Lösung:

Bedingungen an $P(t)$ für eine mögliche Lösung: $P(t)$ muss positiv definit sein, d.h. $P(t) > 0$, $P(2) = 0$ und $P(t)$ muss zeitvariant sein.

- Abbildung 1: $P_1(2) \neq 0 \rightarrow$ Keine mögliche Lösung
- Abbildung 2: Erfüllt alle Bedingungen $\rightarrow$ Mögliche Lösung
- Abbildung 3: $P_3(t) \not\equiv 0 \rightarrow$ Keine mögliche Lösung
- Abbildung 4: P_4 ist konstant [$P_4(2) \neq 0$] $\rightarrow$ Keine mögliche Lösung

Aufgabe 8 (7 Punkte)

Für das System

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t),$$

soll ein LQ-Regler bezüglich des Gütekriteriums

$$J(\mathbf{x}_0, u(\cdot)) = \int_0^\infty (\mathbf{x}^T(t) Q \mathbf{x}(t) + u^2(t)) dt$$

entworfen werden. Die Lösung der Riccati-Gleichung ist:

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

- a) Berechnen Sie die optimale Zustandsrückführung $u = -\mathbf{k}^T \mathbf{x}$. (1 Punkt)
- b) Berechnen Sie für $\mathbf{x}_0 = [0 \ 1]^T$ den minimalen Wert J_{opt} des Gütekriteriums. (1 Punkt)
- c) Berechnen Sie die Gewichtsmatrix Q des oben gegebenen LQR-Problems. (2 Punkte)
- d) Zeigen Sie mittels Rechnung, dass die Funktion $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P \mathbf{x}$ eine Ljapunowfunktion für den geschlossenen Regelkreises ist. (3 Punkte)

Lösung:

- a) Optimale Zustandsrückführung $u = -\mathbf{k}^T \mathbf{x}$:

$$u = -\frac{1}{r} \mathbf{b}^T \mathbf{P} \mathbf{x} = -[0 \ 1] \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} = -[1 \ 3] \mathbf{x}$$

- b) Minimaler Wert J_{opt} des Gütekriteriums für $\mathbf{x}_0 = [0 \ 1]^T$.

$$J_{opt} = \mathbf{x}_0^T \mathbf{P} \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 3.$$

- c) Berechnen der Gewichtsmatrix Q :

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{Q} - \mathbf{P} \mathbf{b} \frac{1}{r} \mathbf{b}^T \mathbf{P} \\ 0 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \mathbf{Q} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Auflösen nach Q ergibt:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

d) Geschlossener Regelkreis:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t).$$

Überprüfung, ob V eine Ljapunowfunktion des geschlossenen Regelkreises ist:

(i) V ist positiv definite, weil $\mathbf{P}$ positiv definite ist.

(ii) $\dot{V}$ ist negativ definite, weil

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) &= \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t})^T \mathbf{P} \mathbf{x}(\mathbf{t}) + \mathbf{x}(\mathbf{t}) \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) \\ &= \mathbf{x}(\mathbf{t})^T \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \right) \mathbf{x}(\mathbf{t}) \\ &= \mathbf{x}(\mathbf{t})^T \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -3 & -10 \end{bmatrix}}_{<0} \mathbf{x}(\mathbf{t}) \\ &< 0. \end{aligned}$$

Da $V > 0$ und $\dot{V} < 0$, ist V eine Ljapunowfunktion des geschlossenen Regelkreises.

Aufgabe 9 (5 Punkte) Zu den folgende Aussagen ist anzugeben, ob sie wahr oder falsch sind. Geben Sie jeweils eine kurze Begründung, ausführliche mathematische oder formelle Begründungen werden nicht erwartet. Aussagen ohne Begründung werden nicht gewertet.

- a) Wenn ein lineares zeitinvariantes System steuerbar ist, dann können die Nullstellen des geschlossenen Kreises durch eine Ausgangsrückführung an beliebige Stellen gelegt werden. (1 Punkt)
- b) Die Matrizenungleichung

$$\begin{bmatrix} X^{-1} & 0 & C^T \\ 0 & (\gamma^2 - \mu)I & D^T \\ C & D & I \end{bmatrix} > 0,$$

mit den unbekannten Parametern X , μ , und γ^2 , stellt eine lineare Matrizenungleichung (LMI) dar. (1 Punkt)

- c) Die $\mathcal{L}_2$ -Norm des Zeitsignals $f(t) = 9e^{-0.5t}$ ist endlich. (1 Punkt)
- d) Für instabile Systeme $G(s)$ gilt auch $\|G\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} |G(j\omega)|$. (2 Punkte)

Lösung:

- a) Nein, Nullstellen sind invariant bzgl. Ausgangsrückführung.
- b) Nein, Invertierung X^{-1} ist nichtlinear
- c) Ja, denn $\sqrt{\int_0^\infty 9e^{-t} dt} = 3$.
- d) Nein, die 2-induzierte Norm $\|G\|_{2-ind}$ ist bei instabilen Systemen unendlich und entspricht nicht $\sup_{\omega \in \mathbb{R}} |G(j\omega)|$. In der Tat ist die $\mathcal{H}_\infty$ -Norm instabiler Systeme unendlich groß.

Aufgabe 10 (6 Punkte)

Gegeben sei der Regelkreis in Abb. 5 mit den bekannten Übertragungsmatrizen $G_1(s)$ und $G_2(s)$. Der Regler $K(s)$ sei als nominell stabilisierend angenommen. Für die als stabil angenommene Unsicherheit Δ gelte zunächst $\|\Delta\|_\infty \leq 1$. Alle betrachteten Übertragungsfunktionen seien SISO-Systeme.

- Das betrachtete Problem soll in die Standard- M - Δ -Struktur umgewandelt werden. Leiten Sie die Übertragungsmatrix $M(s)$ her. (2 Punkte)
- Anstatt Δ wird nun eine Unsicherheit $\bar{\Delta}(s) = W(s)\Delta(s)$ betrachtet ($W(s)$ wird ebenfalls als stabil angenommen). Geben Sie ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für robuste Stabilität des geschlossenen Kreises gegenüber der betrachteten Unsicherheitsklasse an. (1 Punkt)
- Es sei jetzt $W(s) = 3, G_1(s) = G_2(s) = \frac{1}{s+1}$ und $K \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie den Wertebereich von K , so dass der geschlossene Kreis robust stabil gegenüber der betrachteten Unsicherheitsklasse ist. (3 Punkte)

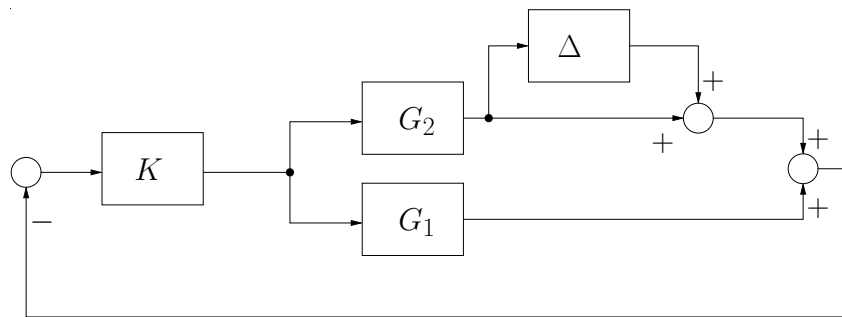


Abbildung 5: Zu Aufgabe 10.

Lösung:

a) ...

$$M = -\frac{G_2 K}{1 + K G_1 + K G_2}$$

b) $\|MW\|_\infty < 1$

$$c) MW = -\frac{\frac{3K}{s+1}}{1 + \frac{K}{s+1} + \frac{K}{s+1}} = -\frac{3K}{s+1+2K}$$

damit M nominell stabil ist, muss $K > -\frac{1}{2}$ gelten. Zusätzlich ist die Bedingung für robuste Stabilität $\|MW\|_\infty < 1$. Dabei nimmt $|MW(j\omega)|$ seinen Maximalwert an bei $\omega = 0$ (siehe Bodediagramm). Daher muss gelten $\frac{3K}{1+2K} < 1$ und $\frac{3K}{1+2K} > -1$. Daraus folgt $K < 1$ und $K > -\frac{1}{5}$. Zusammen folgt also $-\frac{1}{5} < K < 1$.